紀要『人文・自然研究』第 19 号

ピュタゴラス音律考

小島敎知

2025 年 3 月 25 日発行

一橋大学 全学共通教育センター

人文・自然研究　第 19 号

Hitotsubashi Review of Arts and Sciences 19

2025 年 3 月 25 日発行

発行：一橋大学全学共通教育センター

186-8601 東京都国立市中 2-1

組版：精興社

ピュタゴラス音律考

小島教知

1. はじめに

音律とは複数の音の高さに対する相対的な音高の規則のことをいう．主な音律として，本稿の表題にあるピュタゴラス音律のほかに純正律・中全音律，また現行で標準的に用いられている十二平均律などがある．そしてある特定の音律にしたがって実際に楽器などで音の高さを合わせることを調律という．逆にいえば具体的な作業である調律を抽象化して記述したものを音律ということができる．

さて，いま述べたピュタゴラス音律・純正律・中全音律・十二平均律であるが，歴史的にはピュタゴラス音律が最も古く，十二平均律が最も新しいものである．また各音律の性質をみると，純正律はピュタゴラス音律を拡張したものであり，中全音律・十二平均律はピュタゴラス音律を変形したものとみることができる．それゆえ，これらの音律の基礎にはピュタゴラス音律がある．また，音程の理論などもピュタゴラス音律を前提として構築されている．さらに，東洋の音律，たとえば中国の十二律・六十律等や日本の雅楽の音律などもピュタゴラス音律の一種である．このようにしてみると，ピュタゴラス音律は数ある音律の中でも最も重要であることがわかる．しかるに『楽典』（文献［2］）などでは純正律や十二平均律はとりあげていても，ピュタゴラス音律はとりあげられていない．また文献［5］ではピュタゴラス音律をとりあげてはいるものの，十二平均律的価値観からの記述であるため，その本質をきちんととらえているとは言いがたい．そして多くの文献では有限ピュタゴラス音律という極めて制限されたものについて議論（あるいは定義）しているという現状がある．

そこで本稿では，ピュタゴラス音律の本質を正確にとらえるため，音律を最も広い範囲で規定することにする．そしてピュタゴラス音律について次の３つを考察する．１つめは，ピュタゴラス音律とその周辺に対する誤解について，２つめはピュタゴラス音律の構造について，３つめはピュタゴラス音律の数理的解釈と数学的性質についてである．これらの内容を理解することによって，ピュタゴラス音律という音律を客観的に俯瞰することができるようになるであろう．

2. 準備

さて，本論にはいる前に，音律そのものを歴史的視点から考察しよう．現在は音の高さを数値として測ることができるので，それをもとに調律することができるが，古代においてはそのようなことはできなかった．したがって音の高さを合わせるための何らかの方法が必要である．そこで洋の東西を問わず自然に着目されたのが**協和**（*συμφωνία*）という関係である．これは２つの（異なる）高さの音を同時に鳴らしたときに整って聞こえることをいう．たとえば１つの音とその１オクターブ（古代ギリシアでは**全度**（*διὰ πασῶν*）もしくは**八度**（*δι’ ὀκτώ*）という）上（もしくは下）の音を同時に鳴らすと整って聞こえ，

この２つの音は同種の音と認識される．また１オクターブより狭い音程についても，ドとソの組合せやドとファの組合せはドとレの組合せなどに比べて整って聞こえる．前者の音程を**五度**（*διὰ πέντε*）といい，後者の音程を**四度**（*διὰ τεσσάρων*）という．古代ギリシアにおいてはこの３つの音程（八度・五度・四度）が基本的な協和音程とみなされた．一方，古代中国においても，八度は**相応ずる**といい，五度は**相和する**という表現でこれらの協和音が認識されていた．

協和する音は耳で聞いて知覚でき，しかも完全な協和音から少しずれると**唸り音**と呼ばれる音が発生するため，唸り音が聞こえないように調整すればかなり誤差の少ない調律が可能である．それゆえに，調律において協和する音に合わせるという原理が出てくるのは自然なことであった．このことを音律という観点から述べるならば，最初に何らかの基準の音高を定めたあと，すでに音高の定まっている音に対し協和する音を順次とることによって，他の音高を得る規則が考えられる．この規則を便宜上完全協和音程によって定まる音律，略して**完全協和音律**ということにする．

実はこの完全協和音律こそが表題における**ピュタゴラス音律**のことであるが，しばらくのあいだ，本稿では完全協和音律と呼ぶことにする．それは多くの文献でピュタゴラス音律という名称に起因する誤解があるためである．その先入観を排除するため，ここではあえて完全協和音律と呼ぶのである．

3. 完全協和音律（ピュタゴラス音律）について

まずはじめにピュタゴラス音律とその周辺に対する誤解について議論する．いましばらくピュタゴラス音律を完全協和音律と呼ぶことはすでに述べた．ここで完全協和音律は協和音を順次とることによって得られる音律であるから，聴覚のみで音合わせができる音律であるということができる．また基本の協和音として八度と五度の２つをとることができるから，拙稿［8］でいうところの２元音律である．あらためて完全協和音律について述べるならば次のようにいえるであろう：

> 完全協和音律とは音高の定まった基準音を１つ定め，すでに音高の定まった音に対し，八度高い音・低い音あるいは五度高い音・低い音を順次定めることによって得られる音の体系である．

ここで注意しておくと，順次音高を定めるとき，本稿においてはその回数に制限を設けない．それはこのように定義することによって完全協和音律の一意性を確保することができるからである．もちろん実用上は回数に制限を設けざるをえないが，その場合は完全協和音律の一部分，すなわち有限完全協和音律と解釈する．

さて，有限完全協和音律は協和音から自然に出てくるものである．よって複数の音高が出せる楽器がつくられれば，その音合わせとして完全協和音律（の一部分）を考えることは自然に行われたであろうと推測される．すなわち完全協和音律は理論の体系化はされなくても自然発生的に生じたと考えられる．この音律に数理的な理論を持ち込んだのが，古代ギリシアの哲学者であるピュータゴラース（*Πυθαγόρας*，本稿では人名の場合，より発音に忠実なピュータゴラースと表記する）であったといわれている．したがって

> ピュータゴラースが見出したのは完全協和音律に対して数理的解釈を与えたこと

であって，完全協和音律の体系を発見あるいは発明したとは言いがたい

といえる．したがって端的にいえば（完全協和音律はピュタゴラス音律であるから）

ピュタゴラス音律はピュータゴラースが発見あるいは発明したものではない

と結論される．そもそもピュタゴラス音律（Pythagorean tuning）という名称自体，音律が意識されるようになった近代以後に名づけられたものであり，完全協和音律をピュータゴラースに帰するようになったのも近代以後であると推測される．したがって完全協和音律がピュタゴラス音律と名づけられていてもピュータゴラースとは独立に考える必要がある．なお余談ではあるが 1890 年に発行されたグローヴ編『音楽と音楽家に関する事典』第 4 巻（文献［12］）の音律（temperament）の項には純正律・中全音律・平均律の用語はあるが，ピュタゴラス音律の用語はない（ピュータゴラース派が八度・五度・四度のみを協和音程とみなしていたという記述はある）．

さて，完全協和音律に数理的な理論を持ち込んだのがピュータゴラースであると述べたが，実際にピュータゴラースが発見したとされるのは

2 つの絃の長さの比（以下，絃長比）が簡単な整数比のとき，その 2 つの音は協和する

ことであり，あるいはより詳細に

絃長比が 2：1 のとき八度，絃長比が 3：2 のとき五度，絃長比が 4：3 のとき四度の音程である

ことである．ここで注意すべきはそれ以外のことについてはピュータゴラースが発見したかどうかは確たる証拠がないことにある．とくに以下の言説

(1) ピュータゴラースが完全協和音律（ピュタゴラス音律）をつくった
(2) ピュータゴラースはとくに絃長比 3：2（五度）を重視し，その音程を積み重ねることで音律をつくった
(3) ピュータゴラースは五度を 12 回積み重ねると八度の差を除いてほぼ同じ高さになることを発見し，そのほぼ同じ高さの 2 つの音の音程をコンマと名づけた

などは，実際には疑わしいものであるといわざるをえない．以下，そのことを検証する．

まず（1）については，ピュータゴラースの時代より前に複数の音高が出せる楽器が存在していたことを示す必要がある．そこで古代ギリシアの楽器であるキタラー（キタラ）について『新音楽辞典 楽語』［4, p. 161］を参照すると次のようにある．

古代ギリシアの撥弦楽器。（中略）弦の数は 5 本（前 8 世紀），7 本（前 7 世紀），11 本（前 5 世紀）とふえた。

このことからキタラーは前 7 世紀にはすでに 7 本の絃をもっていることがわかる．そして

これらの絃の音高は何らかの方法によって調律されたはずであるから，その手段として協和音程を用いた可能性は十分にあると考えられる．それゆえ前6世紀の人であるピュータゴラースの時代にはすでに部分的な完全協和音律は存在しており，ピュータゴラースが完全協和音律をつくったというのは過大な表現であるといえる．

次に（2）について考察しよう．古代ギリシアの音楽理論で重視された音程が協和音程であることは確かであるが，その中でも八度・五度・四度のうち五度は優先度が低い音程である．それは音階を構成するときに四度を基準にしたテトラコルドン（*τετράχορδον*, 四絃の意味．四度の音程内に流動音と呼ばれる2つの音を入れて音階を構成する方法）を用いていることからわかる．したがって五度を重視してそれを積み重ねるという考え方自体が古代ギリシアの音楽理論からは出てこない．それのみならず，ピュータゴラースおよびその弟子たちは絃長比3：2だけでなく，より一般の比 $n+1:n$ を考えていたことは確かである．事実，ピュータゴラース派の一人であるアルキュータース（*Ἀρχύτας*）の音階ではピュタゴラス音律の特徴である絃長比3：2と2：1からは決して出てこない28：27，8：7，5：4の音程が考えられている．この比 $n+1:n$ はエピモリオス（*ἐπιμόριος*）と呼ばれ，プトレマイオス（*Πτολεμαῖος*，文献［13, 第1巻第5章］）にもピュータゴラース派がこの比を重視していたとの記述がある．以上のことからわかることは絃長比3：2（五度）が別段特別視されていないことにある．さらにいえることは，もし五度を特別視して音律をつくったのであれば，その音の名称があってしかるべきであるが（実際，中国では五度を基準にして音階が作られ，音の名称が与えられている），古代ギリシアにおいてそのような名称はみられない．したがって上記（2）の言説はきわめて疑わしいものであるといわざるをえない．

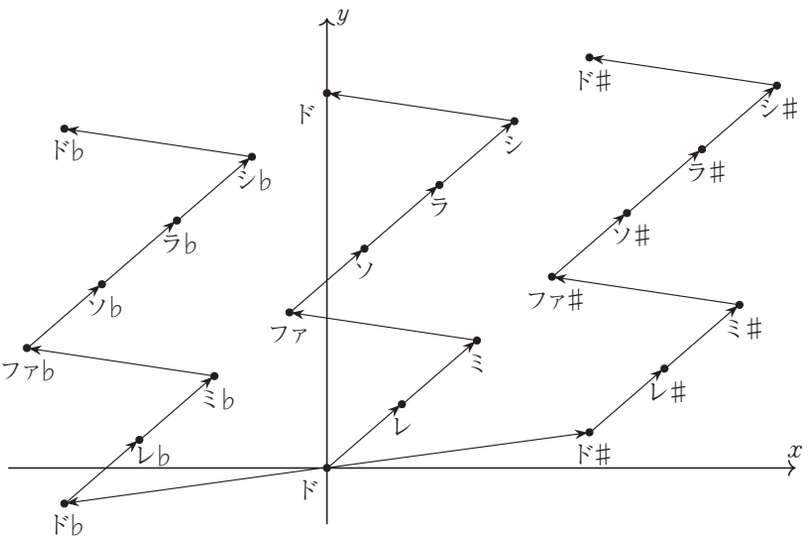
最後に（3）についてであるが，前述したように五度を積み重ねるということ自体が古代ギリシアの音楽理論ではみられない．また仮に五度を12回積み重ねて得られる音程の絃長比531441：524288がほぼ1：1になることにピュータゴラース自身が気づいていたとしても，実際にこの数値に及している文献で最も古いと思われるのは紀元前300年ごろ（ピュータゴラース歿後200年）のエウクレイデース（*Εὐκλείδης*，文献［11］）である．したがってよほどのことがない限りピュータゴラース自身が五度を12回積み重ねると八度の差を除いてほぼ同じ高さになるという関係を発見していたとは考えにくい．また，上記エウクレイデースの文献で言及している数値は531441のみであり，524288の数値は出てこない．あるのは（$A=262144, H=531441$ としたとき）H は A の2倍より大きいという表現だけである．しかもこの計算は1オクターブが6全音より小さいことを示すのに用いられているものであって「五度を12回積み重ねて得られる音程」の意味で算出されたものではない．したがって当然のことながらこの音程はコンマと名づけられていない．なお，コンマの用語自体，音程の意味で用いられた現存する最も古い文献は紀元後6世紀のボエティウス（Boethius，文献［10，第3巻第8章］）である．仮にボエティウスが古代ギリシアの音楽理論においてコンマの用語を目にしていたとしても，ピュータゴラース歿後からボエティウスまで約1000年の間の現存する文献においてコンマの用語がないことを考慮すると，ピュータゴラースが名づけたと考えるのはかなり無理があるといわざるをえない．

以上，しばしばみられる言説（1），（2），（3）に対して検証をおこなった．もちろんのことであるが，以上のことがらについてピュータゴラースが発見した可能性がまったくないとは立証できない．しかし古代ギリシアの音楽理論の歴史的経過を俯瞰すれば「ピュータゴラースが絃長比が簡単な整数比のとき，2つの音は協和することを発見した」以外の

ことをピュータゴラースに帰するのは不自然であるといえるであろう.

4. ピュタゴラス音律の構造

ピュタゴラス音律は2元音律であるから，拙稿［8］によりその構造は2次元空間（平面）上に図示できる．いま八度のベクトルを（0, 1）とし，五度のベクトルを（0.1, q）（ただし $q=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)=0.5849625\cdots$）とする．このとき全音ベクトルは（0.2, $2q-1$），半音ベクトルは（$-0.5, 3-5q$）となる．これを用いてピュタゴラス音律を図示すると



となる．もちろんのことであるが，いま考えているピュタゴラス音律は無限個の音をもつから，この図は上下左右に無限に延長ができる．

この図における y 座標は実際の音の高さに対応する．したがって十二平均律における異名同音（ド♯とレ♭，ミ♯とファなど）の y 座標は異なることに注意しなければならない．また図よりド♯の方がレ♭より高く，ミ♯の方がファより高い音であることがわかる．

それでは，以下，古代ギリシア・古代中国・日本（雅楽）の音律についてそれぞれその構造をみていこう．

(1) 古代ギリシア

古代ギリシアの音階は絃の名をもって表された．すなわち，高い音から順番に**下絃**（*νεάτη* あるいは *νήτη*），**傍下絃**（*παρανεάτη* あるいは *παρανήτη*），**第三絃**（*τρίτη*），**傍中絃**（*παραμέση*），**中絃**（*μέση*），**食指絃**（*λιχανός*），**傍上絃**（*παρυπάτη*），**上絃**（*ὑπάτη*）である．古代ギリシアにおいてはまず下絃・中絃・上絃において

$$\text{下絃} \xrightarrow[\text{五度}]{} \text{中絃} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{上絃}$$

と調律され，また傍中絃は

$$\text{下絃} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{傍中絃} \xrightarrow[\text{五度}]{} \text{上絃}$$

と調律された．ここで矢印の下に音程を書いた場合，その音程分下に音をとることを表す．また後述するが，矢印の上に音程を書いた場合，その音程分上に音をとることを表す．

さて，古代ギリシアにおいてはこの下絃・傍中絃・中絃・上絃は固定した音高であるが，他の4つ，すなわち傍下絃・第三絃・食指絃・傍上絃は状況によって高さの異なる音であった．そのためさまざまな音階が考え出されたが，その中でも一番単純なものが**全音**

（*τόνος*，五度から四度を除いた音程）を用いて

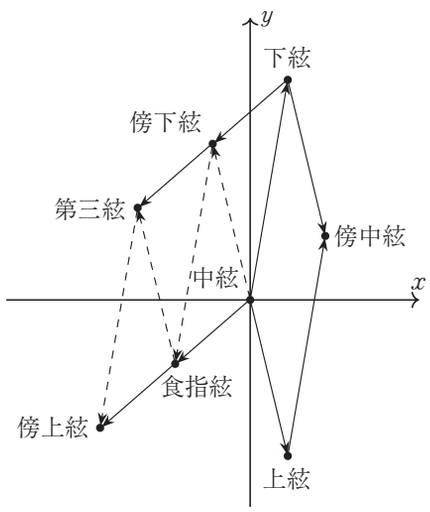
$$\text{下絃} \xrightarrow[\text{全音}]{} \text{傍下絃} \xrightarrow[\text{全音}]{} \text{第三絃} \longrightarrow \text{傍中絃}$$

$$\text{中絃} \xrightarrow[\text{全音}]{} \text{食指絃} \xrightarrow[\text{全音}]{} \text{傍上絃} \longrightarrow \text{上絃}$$

としたものであり，これからなる音階を**二全音的全音階**（*διάτονον διτονιαῖον*）という．全音は五度と四度からつくることができるから，二全音的全音階は上に五度・下に四度を用いると

$$\text{傍上絃} \xrightarrow{\text{五度}} \text{第三絃} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{食指絃} \xrightarrow{\text{五度}} \text{傍下絃} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{中絃} \xrightarrow{\text{五度}} \text{下絃} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{傍中絃}$$

と書くことができる．また中絃を出発点として図で表すと



となる（破線は傍下絃・食指絃・第三絃・傍上絃を協和音程を用いて調律した場合を表す）．これより中絃をラとすれば

古代ギリシア名	下絃	傍下絃	第三絃	傍中絃	中絃	食指絃	傍上絃	上絃
ピュタゴラス音律	ミ	レ	ド	シ	ラ	ソ	ファ	ミ

を得る．

(2)　古代中国

古代中国においては，三分損益法といわれる方法で音高を定めていた（具体的には次節で述べる）．これは実質的には，上に五度の音程をとるのと下に四度の音程をとるのを繰り返す方法である．そして基準音を「黄鐘」として低い音から順番に

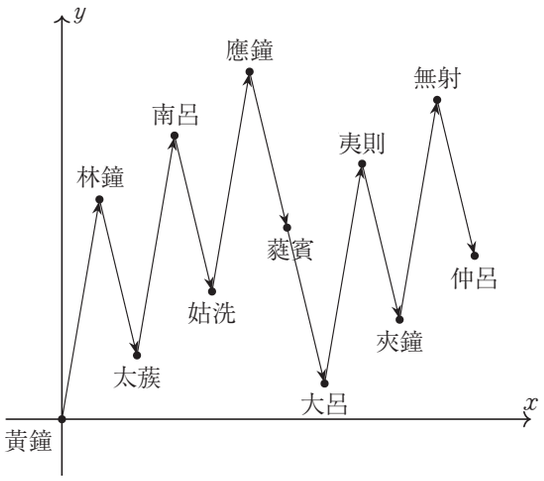
黄鐘（こうしょう）・大呂（たいりょ）・太蔟（たいそう）・夾鐘（きょうしょう）・姑洗（こせん）・仲呂（ちゅうりょ）・蕤賓（すいひん）・林鐘（りんしょう）・夷則（いそく）・南呂（なんりょ）・無射（ぶえき）・應鐘（おうしょう）

の名称がある．これは

$$\text{黄鐘} \xrightarrow{\text{五度}} \text{林鐘} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{太蔟} \xrightarrow{\text{五度}} \text{南呂} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{姑洗} \xrightarrow{\text{五度}} \text{應鐘}$$

$$\xrightarrow[\text{四度}]{} \text{蕤賓} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{大呂} \xrightarrow{\text{五度}} \text{夷則} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{夾鐘} \xrightarrow{\text{五度}} \text{無射} \xrightarrow[\text{四度}]{} \text{仲呂}$$

のように調律され，図で表せば



となる．これより黄鐘をドとすれば

中国名	黄鐘	大呂	太蔟	夾鐘	姑洗	仲呂
ピュタゴラス音律	ド	ド♯	レ	レ♯	ミ	ミ♯
中国名	蕤賓	林鐘	夷則	南呂	無射	應鐘
ピュタゴラス音律	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ	ラ♯	シ

を得る．なお古代中国には相対音高として五声・七声もあるが，ここでは説明を省略する（拙稿［7］,［8］等を参照のこと）．

(3)　日本（雅楽）

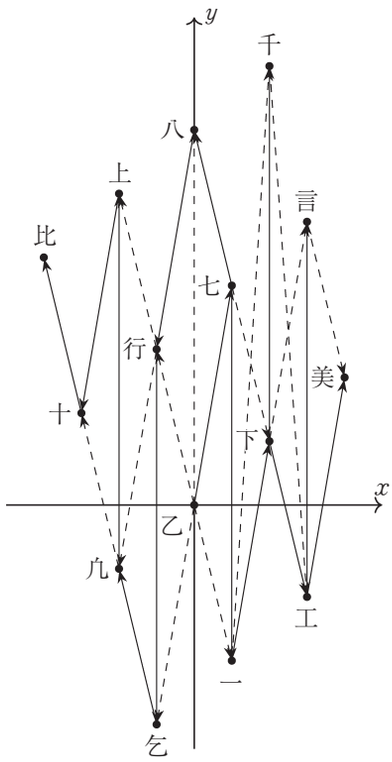
日本の雅楽においては基準音を「壹越」として低い音から順番に

壹越（いちこつ）・断金（たんぎん）・平調（ひょうじょう）・勝絶（しょうぜつ）・下無（しもむ）・双調（そうじょう）・鳧鐘（ふしょう）・黄鐘（おうしき）・鸞鏡（らんけい）・盤渉（ばんしき）・神仙（しんせん）・上無（かみむ）

が用いられるが，安倍季尚『樂家錄』巻之十（文献［1］参照．また文献［3, p. 111］・［4, pp. 283–284］にも音高についての記述あり）の笙の調律の記述では

> 先定乙管声（正平調）以乙調七（正盤渉）以七調八（上平調復可合試於乙声）以八調（行正黄鐘復合於乙声）以七調一（下盤渉復合於乙声）以
> 一調下（正下無復合於七声）以行調乞（下黄鐘復合於乙声）以乞調九（正壹越復合於行声）以九調上（上壹越復合於行声）以上調十（正双調復合於九声）以下
> 調千（上下無復合於一声）以下調工（下上無復合於千声）以工調言（正上無復合於下声）以工調美（正鳧鐘復可合試於言声）以十調比（正神仙）已上

とある．ここで「調」は「調（ととの）ふ」と訓ぜられ，協和音をとることを意味すると解せられる．したがって，まず「乙」の管の音を調子笛等の音で合わせ，次に「七」を「乙」の音に合わせ，以下順に「八」「行」「一」「下」「乞」「九」「上」「十」「千」「工」「言」「美」「比」の音を合わせたと考えられる．これを図示すると



となる．ここで破線は割注にある調律を表す．これより乙の管（平調）をミとすれば

日本名	壹越	断金	平調	勝絶	下無	双調
管名	/ 凡 / 上	/ /	/ 乙 / 八	/ /	/ 下 / 千	/ 十 /
ピュタゴラス音律	レ	—	ミ	—	ファ♯	ソ
日本名	鳧鐘	黄鐘	鸞鏡	盤渉	神仙	上無
管名	/ 美 /	乞 / 行 /	/ /	一 / 七 /	/ 比 /	工 / 言 /
ピュタゴラス音律	ソ♯	ラ	—	シ	ド	ド♯

を得る．ここで管名の「/ /」は音高で「下 / 正 / 上」を表す．たとえば乙は正平調であり，八は上平調を意味する．また断金・勝絶・鸞鏡は調律されないため，音高は不確定である．

5. ピュタゴラス音律の数理的解釈

完全協和音律は調律する際，耳で聞いて音を合わすことができるため，多少の訓練は必要であるが比較的容易に調律ができる音律である．そしてこの音律の基礎となる協和する音というのは物理学的にいえば「波長（の数倍）が合う音」という特徴がある．しかし古代においてはそもそも音が波（疎密波）であるという認識はなく，ましてや波長という概念もない．そこで波長ではなく協和音程を見出す手段として，西洋では絃の長さの比（絃長比）が，東洋では管の長さの比（管長比）が考えられた．そしてこの原理によって音程を数理的解釈することが可能となった．

さて西洋においては絃長比が簡単な整数比のとき音が協和することを発見したとされるピュータゴラースの名をとって，完全協和音律を後の時代に（近代以後）ピュタゴラス音律と呼ぶようになった．一方，東洋では発見者は定かではないが，管の長さを調整する方法より，古代から三分損益法と呼ばれた．三分損益法の名称は，もとの管から三分の一を除く（三分損一）と，ほぼ五度上の音が得られ，もとの管の三分の一の長さを加える（三

分益一）と，ほぼ四度下の音が得られることによる．これらは現代では振動数比と解釈される．すなわち物理学的には音は疎密波と呼ばれる振動であり，単位時間あたりの振動数が大きいほど高い音になり，小さいほど低い音になる．そして音程は通常高い音の振動数から低い音の振動数で割った値で表され，この値を振動数比という．そして八度・五度・四度の音程は振動数比ではそれぞれ 2，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$ である．ピュタゴラス音律の振動数比については拙稿［8］ですでに述べているので詳細については省略する．

本稿ではこの振動数比の対数について考察する．具体的には五度の音程は八度の音程の“何倍か”を考える．式で表すならば

$$[\text{五度}] = q[\text{八度}]$$

となる q を求めることに相当する．いま音程○○と□□を合わせると△△であるとする．このとき式で書けば

$$[\bigcirc\bigcirc] + [\square\square] = [\triangle\triangle]$$

である．一方，振動数比で書けば

$$(\bigcirc\bigcirc\text{の振動数比}) \times (\square\square\text{の振動数比}) = (\triangle\triangle\text{の振動数比})$$

である．よって正の数 a に対し

$$a[\bigcirc\bigcirc] = [\triangle\triangle]$$

ならば

$$(\bigcirc\bigcirc\text{の振動数比})^a = (\triangle\triangle\text{の振動数比})$$

と考えるのが自然である．したがって

$$(\text{五度の振動数比}) = (\text{八度の振動数比})^q$$

より

$$\frac{3}{2} = 2^q$$

であるから，対数を用いれば

$$q = \log_2\left(\frac{3}{2}\right) = 0.584962500721156181 45\cdots$$

を得る．

この［五度］$= q$［八度］の関係を用いれば，他の音程も八度の何倍かで表すことができる．実際，

$$[\text{四度}] = [\text{八度}] - [\text{五度}] = [\text{八度}] - q[\text{八度}] = (1-q)[\text{八度}]$$

であり，

$$[\text{全音}] = [\text{五度}] - [\text{四度}] = q[\text{八度}] - (1-q)[\text{八度}] = (2q-1)[\text{八度}]$$

と表せる．

ここで上の式をみると，四度は八度から五度を除いた残りであり，全音は五度から四度を除いた残りである．したがってより狭い音程を求めるには，四度から全音を除いた残り

を考えればよい．この場合は四度から2つの全音を除けば全音より狭い音程が得られる．この音程を**残余**（*λεῖμμα*）もしくは**半音**（正確には**全音階的半音**）という．これらを式で書くと

$$[\text{四度}]=[\text{八度}]-[\text{五度}]$$
$$[\text{全音}]=[\text{五度}]-[\text{四度}]$$
$$[\text{半音}]=[\text{四度}]-2[\text{全音}]$$

である．そしてこの3つの式は八度と五度に対するユークリッド（エウクレイデース）の互除法を表している．ユークリッドの互除法とは2つの数に対してその最大公約数を求める方法として知られており，たとえば5917と3233の最大公約数を求めるには5917を3233で割ってその余り2684を求め，次に3233を2684で割ってその余り549を求め，2684を549で割ってその余り488を求め，549を488で割ってその余り61を求める．488を61で割ると割り切れるので，このとき最後の余り61が5917と3233の最大公約数となる．これを上の3つの式でいうならば，［八度］を［五度］で割って余り［四度］を求め，次に［五度］を［四度］で割って余り［全音］を求め，［四度］を［全音］で割って余り［半音］を求めることになる．なお［全音］を［半音］で割ると余りは［ピュタゴラス・コンマ］である．これを繰り返すことでいくらでも狭い音程が存在することがわかる（ピュタゴラス音律においては割り切れることはない）．

このようにして狭い音程を見出すにはユークリッドの互除法を使う方法がある一方で，古代中国において三分損益法を延長することで狭い音程が見出された．京房は三分損益法を59回繰り返すことで六十律を得，錢樂之は359回繰り返すことで三百六十律を得た．そこで文献［9］にある三百六十律の音名を＊＊としたとき，黄鍾（＝黃鐘）と＊＊の音程を記号〖＊＊〗で表すことにすると

$$〖\text{太蔟}〗=2〖\text{林鍾}〗-〖\text{半黄鍾}〗$$
$$〖\text{大呂}〗=4〖\text{太蔟}〗-〖\text{林鍾}〗$$
$$〖\text{執始}〗=2〖\text{大呂}〗-〖\text{太蔟}〗$$
$$〖\text{包育}〗=5〖\text{執始}〗-〖\text{大呂}〗$$
$$〖\text{安運}〗=7〖\text{包育}〗-〖\text{執始}〗$$

の関係が成り立つ（ただし〖安運〗は半黄鍾と安運の音程とする）．このとき，〖半黄鍾〗，〖林鍾〗，〖太蔟〗，〖大呂〗，〖執始〗，〖包育〗，〖安運〗の順に狭い音程になる（なお西洋式にいえば〖半黄鍾〗＝［八度］，〖林鍾〗＝［五度］，〖太蔟〗＝［全音］＝［長2度］，〖大呂〗＝［半音階的半音］＝［増1度］，〖執始〗＝［ピュタゴラス・コンマ］＝［増逆2度］である）．上の5つの式はユークリッドの互除法とは異なるが，互除法の一種であるため，便宜上もう一つの互除法と呼ぶ．

以上のように，ピュタゴラス音律は無限個の要素をもつ音律であるから，いくらでも狭い音程が存在するわけであるが，具体的に狭い音程を見出す方法としてユークリッドの互除法ともう一つの互除法があった．すなわち［○○］＞［□□］のとき

$$[\triangle\triangle]=[\bigcirc\bigcirc]-a[\square\square]$$

となるaと［△△］を求める方法と

$$[\diamond\diamond]=b[\square\square]-[\bigcirc\bigcirc]$$

となる b と［◇◇］を求める方法である．ここで互除法を［八度］と［五度］から始めると，a は順に

$$1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, \cdots\cdots$$

となり，b は順に

$$2, 4, 2, 5, 7, 2, 25, 2, 4, 3, \underbrace{2, \cdots\cdots, 2,}_{54\text{個}} 3, 2, 2, 2, \cdots\cdots$$

となることが知られている．これは q の 2 種類の連分数展開として得られるものである．すなわち

$$q = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

および

$$q = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{7-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

から得られる．これらの連分数は木田雅成『連分数』（文献［6］）の記号を用いれば

$$\frac{1}{q} = [1\,;\, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, \cdots\cdots]$$

$$= [\![2\,;\, 4, 2, 5, 7, 2, 25, 2, 4, 3, \underbrace{2, \cdots\cdots, 2,}_{54\text{個}} 3, 2, 2, 2, \cdots\cdots]\!]$$

と書ける（［6，命題 14.10.］も参照のこと）．

この結果は音楽的にはほとんど意味をなさないものであり，また数学的にも特段新しい結果ではないが，このような指摘をしている文献が管見の限りみつからなかったため，ここに記すことにする．

6. おわりに

以上，ピュタゴラス音律について考察した．重要なことはピュタゴラス音律という体系は数理的解釈をするまえから自然発生的に存在したと考えられることにある．多くの文献では（ピュータゴラースの名から）数理的解釈を優先させているが，それはピュタゴラス音律を理解するための副次的なものであることに注意しなければならない．その一方で，数理的解釈については，対数を用いることによって，互除法ひいては連分数論と密接な関係があることもわかる．このようにしてみると，本稿の考察はピュタゴラス音律について従来の視点とは違った角度からみたものであるといえるであろう．

引用・参考文献

［1］安倍季尚『樂家錄』盛岡市公民館所蔵版（元祿 3（1690/1691））
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100162450/

［2］石桁真礼生ほか『新装版 楽典 理論と実習』音楽之友社（2001）

［3］小野貴嗣編，小野亮哉監修，東儀信太郎ほか『雅楽事典【新装版】』里文出版（2019）

［4］音楽之友社編『新音楽辞典 楽語』音楽之友社（1977）

［5］笠原潔・徳丸吉彦『音楽理論の基礎』放送大学教育振興会（2007）

［6］木田雅成『連分数』近代科学社（2022）

［7］小島教知「日本雅楽の音律に関するいくつかの注意」智山学報 **70**，139–152（2021）

［8］小島教知「音律論からみた音楽理論の問題点」人文・自然研究 **18**，97–117（2024）

［9］魏徵等撰『隋書』高松講道館（天保 15（1844））

［10］De institutione musica, *Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo, De institutione musica libri quinque*, Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri（1867），ボエティウス 伊藤友計訳『音楽教程』講談社学術文庫（2023）

［11］***Εὐκλείδου κατατομὴ κανόνος***, *Euclidis opera omnia*, Vol. VIII, Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri（1916）

［12］Grove, G. ed., *A dictionary of music and musicians*, Vol. IV, London: Macmillan and Co. and New York（1890）

［13］***Κλαυδίου Πτολεμαίου ἁρμονικῶν βιβλία γ΄***, *Claudii Ptolemæi Harmonicorum libri tres*, Sheldonian Theatre, Oxford（1682），山本建郎訳『アリストクセノス／プトレマイオス 古代音楽論集』京都大学学術出版会（2008）

Abstract

On the Pythagorean tuning

Noritomo KOZIMA

Abstract: The Pythagorean tuning is a system of musical tuning generated by octaves (diapason), perfect fifths (diapente), perfect fourths (diatessaron). In other words, this generated by perfectly consonant intervals. However, in many literatures, there is a misconception that the Pythagorean tuning is mathematical because Pythagoras was also a mathematician. In this paper, we first consider the Pythagorean tuning independently of the mathematical elements, analyse the this system. After that, we consider the mathematical properties. In investigating the mathematical properties, we use logarithms and Euclidean reciprocity. And the result is expressed using regular and negative continued fraction.