紀要『人文・自然研究』第 18 号

「高等学校数学Ｂにおける正規分布の取り扱いについて」

小林亜矢子

2024 年 3 月 25 日発行

一橋大学 全学共通教育センター

人文・自然研究　第 18 号

Hitotsubashi Review of Arts and Sciences 18

2024 年 3 月 25 日発行

発行：一橋大学全学共通教育センター

186-8601 東京都国立市中 2-1

組版：精興社

「高等学校数学Ｂにおける正規分布の取り扱いについて」

小林亜矢子

1. はじめに

本稿では関数はすべて実数値関数とする。μ を実数、σ を正の実数とし、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

とおくと、$f(x)$ は連続確率変数 X の確率密度関数となり、X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うという。ただし、e はネピアの数である。自然現象や社会現象の中には、観測データの分布が正規分布に近いものがある。自然現象の例としては、体内時計や身長のデータなどがあり、社会現象の例としては商品の購買動向のデータなどがあげられる。このように、正規分布は実社会におけるさまざまな現象をモデル化するときに多く用いられる。また、数学的にも中心極限定理が示しているように、どのような分布であっても、独立で同分布であれば、それらの和の標準化は標準正規分布に近づくことが知られている。そのため、正規分布に従う確率変数の特徴について高等学校数学科において学習することに大きな意義があると筆者は考える。また、なるべく多くの高校生が正規分布を知る機会を得ることが必要であることから、数学Ｂで取り扱うことも納得できる。しかし、数学Ｂで正規分布を取り扱うことには多くの問題がある。本稿では、現行の学習指導要領が正規分布を数学Ｂでどのように扱うことを求めているかに触れつつ、数学Ｂで扱うことの問題点を示す。さらに、これらの問題点をいかに数学Ⅰ、Ⅱ、数学Ａ、Ｂの知識のみで改善し、生徒が自らの知識・技能を用いて正規分布の特徴を考察できるように指導するかについて、提言する。

2. 高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理数編における正規分布の取り扱いに関する記述

「高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理数編」（以降「指導要領解説」と略記する）において、「統計的な推測」に関する記載として、以下の内容がある。

統計的な推測について、数学的活動を通して、その有用性を認識するとともに次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。

（ア）　標本調査の考え方について理解を深めること。

（イ）　確率変数と確率分布について理解すること。

（ウ）　二項分布と正規分布の性質や特徴について理解すること。

（エ）　正規分布を用いた区間推定及び仮説検定の方法を理解すること。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（ア）　確率分布や標本分布の特徴を、確率変数の平均、分散、標準偏差などを用いて考察すること。

（イ） 目的に応じて標本調査を設定し、収集したデータを基にコンピュータなどの情報機器を用いて処理するなどして、母集団の特徴や傾向を推測し判断するとともに、標本調査の方法や結果を批判的に考察すること。

上記内容は「高等学校学習指導要領（平成30年告示）」（以降、「指導要領」と略記する）における記述であり、この内容を受けて、指導要領解説では、それぞれの育成を目指す資質・能力を育むためにどのように指導することが望ましいか詳しく記載されている。以下、指導要領解説における正規分布に関する記述部分の抜粋である。

> 連続型確率分布である正規分布を取り扱う。正規分布は連続的な確率変数の分布であり、その定義は連続関数や積分の概念等が用いられるため、数学的に厳密に取り扱うことは高等学校数学の範囲の中では難しい。その一方で、日常の事象や社会の事象などにおいて観測される変量には、その分布が近似的に正規分布に従うとみなせるものや、変量の値に影響を与えている原因を制御すれば正規分布に従うとみなせるものが数多く存在し、正規分布は統計学において重要な役割を果たす。それゆえ、正規分布の定義や分布曲線を与える式などについては理論的な取扱いに深入りせず、具体的な例や実験などを通して、正規分布曲線の形や性質を理解できるようにすることが大切である。（中略）
> 確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ とおくと、Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことを取り扱い、正規分布表を用いて確率 $P(a\leq X\leq b)$ を求めたり、日常の事象や社会の事象などにおいて観測され、正規分布に従うとみなせる変量について考察したりすることなどを取り扱う。

筆者は上記指導要領解説における正規分布に対する記述の「正規分布は連続的な確率変数の分布であり、その定義は連続関数や積分の概念等が用いられるため、数学的に厳密に取り扱うことは高等学校数学の範囲の中では難しい」（以下①）の部分と、「正規分布曲線の形や性質を理解できるようにする」（以下②）及び「確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ とおくと、Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うこと」（以下③）の部分について注目した。①では、正規分布の定義が高等学校数学の範囲の中で扱うことが難しい原因であることを述べている。そこで、可能な限り生徒の論理的思考を刺激するため、正規分布の特徴を壊さない数学Ⅱで取り扱いが可能な連続関数を用いて新しい確率分布を定義することにより、②・③を直観のみではなく数式を処理することで論理的に納得できるようにしたいと考えた。

3. 高等学校数学B教科書における正規分布の取り扱いについてと数学Bで正規分布を扱う意義

ここでは、現在使用されている高等学校数学Bの教科書について、5つの出版社（数研出版（数）、実教出版（実）、啓林館（啓）、東京書籍（東）、第一学習社（一）カッコ内は表1における略記）の8冊の教科書（表1に各教科書の教科書番号を記載）における正規分布に関する記述がどのような内容かを整理比較する。高等学校の教科書の内容は、各社がそれぞれ対象とする生徒を定め同じ科目に対して複数種類を出版することが多い。各社のホームページの説明から、標準的な生徒を対象とする教科書であろうと筆者が判断した

8冊の教科書についての比較であることを断っておく。比較する項目は以下の6点である。

(1) 正規分布曲線の図があるか

(2) 確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うときの期待値 $E(X)$、分散 $V(X)$ についての記述があるか

(3) 正規分布曲線の性質をまとめた記述があるか

(4) 正規分布曲線の性質が成り立つ理由の記述があるか

(5) 標準化の記述があるか

(6) 標準化できる根拠の記述があるか

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
数 710	○	○	○	×	○	×
数 711	○	○	○	×	○	×
実 704	○	○	×	×	○	△
実 705	○	○	○	×	○	△
啓 322	○	○	○	×	○	×
啓 323	○	○	△	×	○	×
東 702	○	○	○	×	○	×
一 331	○	○	○	×	○	×

表1

(注意1) 教科書番号はすべて「数学B○○○」の3桁の数字(○○○)のみを記載している

(注意2) ○:記載アリ　×:記載なし

啓林館　数学B323　(3) について:標準正規分布曲線の性質のみ記載アリのため△

実教出版　数学B704、705　(6) について:標準正規分布の期待値、分散と関連付けて、一般的な期待値、分散の性質を用いて標準化する意味の解説を加えているため△

表1から以下の点がわかる。

(ア) 正規分布曲線の性質をまとめている教科書がほとんどであるが、その性質が成り立つ理由について説明を加えている教科書はない

(イ) 一般の正規分布に従う確率変数を標準化する方法についてはすべての教科書で記述がみられるが、そのように式変形することで標準化できる理由について厳密な説明を加えている教科書はない。

数学教育において、児童生徒の発達段階の応じた論理的な説明は必要不可欠である。これは、数学科の目標が「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す」とし、数学的な見方・考え方は「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的、体系的に考えること」と整理していることからも明らかである。しかしながら、正規分布に関する重要な性質や標準化に関わる部分については論理的な説明をしていない。これは、指導要領解説にもあるように、数学Bで正規分布を扱うことから、積分に関する知識が不足しているためである。そのため、直観理解を重視した教科書の編成にならざるをえない。そのため、高等学校で正規分布を学習したにも関わらず、その性質を裏付ける論理的根拠を知らず「公式の暗記」や「性質の暗記」に終始することが少なくない。数学Ⅲを履修した後に再び正規分布について学習する機会を持てる場合は、置換積分についての知識により論理的根拠を確認できるが、現在の教育課程において数学Ⅲを履修する生徒は理系進学者を中心とする、一部の生徒に過ぎない。旧課程ではあるが、平成27年度公立高等学校に

おける教育課程の編成・実施状況調査（平成25年度入学者抽出調査）によると、普通科等における数学Ⅱの履修率が92.5%、数学Bの履修率が78.1%であることに対し、数学Ⅲの履修率は29.5%にとどまっている。これは国立教育政策研究所「中学校・高等学校における理系選択に関する研究最終報告書」(2013年3月）によると、理系コースと文系コースにコース分けを実施している高等学校において、理系コースが32%であることと数字的にも合致する。数学的な内容を考慮すれば、正規分布については数学Ⅲで扱うべきである。しかし、履修者が数学Bと比較して半分以下である数学Ⅲに組み込んでしまうと、多くの生徒が正規分布を学習する機会を失うことになる。正規分布の統計学における重要性を考慮すれば、なるべく多くの生徒に正規分布の存在を周知し、正規分布の重要性を理解して欲しいと考えることは自然である。それゆえ、教育的配慮から厳密な数学的な指導はできないが、数学Bで正規分布を扱うという決断をしたのだろう。教育課程編成において、こういった決断をした背景は、筆者も十分に理解できるし、その決断を批判するつもりは毛頭ない。しかし、正規分布の重要性やその性質について生徒が「理解」するのではなく「暗記」するものと感じるのであれば、本来の趣旨から外れるのではないだろうか。本稿では、数学Bと同時期に履修することが想定されている数学Ⅱの知識を用いて正規分布曲線と似た特徴をもつ分布曲線をもつ確率変数を導入することで、数学Bにおいても論理的に分布曲線の特徴や標準化について扱うことができる一例を提示する。

4. 数学Ⅱで扱う微分・積分の内容

高等学校において微分・積分については数学Ⅱと数学Ⅲで扱う。2つの大きな違いは扱う関数の範囲である。数学Ⅱにおいて扱う関数は $f(x)=x^n$（n：自然数）のみである。この形の関数の定数倍を足すことは扱うため、項別微分、項別積分についての知識は数学Ⅱで取得する。また、微分係数の定義や導関数の意味についても学習するため、上記タイプの関数に関しては増減表を導入してグラフを描くことも学ぶ。さらに、積分については直線や関数のグラフで囲まれる図形の面積を求める方法について考察することを数学Ⅱで扱う。つまり、数学Ⅲで学習する基礎的な微分・積分の内容は数学Ⅱで既に学習済みであり、「合成関数の微分」や「置換積分」といった計算テックニックを数学Ⅱまでの学習では知らないだけである。これらの点を考慮し、標準正規分布と一般の正規分布の関係と同様の関係を満たす2つの確率変数の確率密度関数を $f(x)=x^n$（n：自然数）のタイプの関数を用いて定義し、生徒に自分の手を使って実際に計算をする体験をして欲しいと筆者は考える。

5. 新しい関数の導入

数学Ⅱで扱うことができる関数であり、正規分布の特徴を「手を使って」確認できる関数であることが新しく導入する関数の満たすべき条件である。ここで、数学Bの教科書で記述されている正規分布曲線が満たしている条件を確認しよう。（表1における（3））

確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うときの分布曲線は以下の3つの性質を満たしている。

① 直線 $x=\mu$ に関して左右対称な山形である

② x 軸が漸近線である

③ σ が大きくなると山が低くなり、横に広がる

これらの3つの性質を X の分布曲線が満たしていることが教科書には記載されており、μ

やσを具体的な数値で与えてグラフの比較をして直観的な理解の助けとする教科書もある。これらの特徴を理解するにあたり、文字係数の関数に対してグラフを描き、係数部分の文字の値を変化させることで、グラフがどのように変化するのかを確認することが大切である。しかし、前述のとおり、正規分布の確率密度関数は指数関数と2次関数の合成関数であるため、数学Ⅱでは扱うことができない。(正確なグラフを描くこともできない) そのため、グラフ作成アプリなどを利用するという解決方法も有効かと思うが、本稿では敢えて生徒が自力でグラフを描き、そこから関数の特徴とグラフの特徴を考察することに拘った。次に、確率変数Xの標準化に関して、$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$とすればZは標準正規分布に従う確率変数となることを合成関数の微分や置換積分の知識を用いずに理解することが可能な関数の導入を目指した。筆者が最も気を配った点は、グラフの描きやすさである。平行移動の概念を自由に使いこなし、式変形を行った上で、グラフが簡単に描けることによって、関数に用いられた文字係数の変化とグラフの関係を考察することが可能になると考えたからである。

以下、cは正の実数とし、αは実数とする。関数$f(x)$を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}\left\{-\dfrac{3\sqrt{5}}{100}\left(\dfrac{x-\alpha}{c}\right)^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\right\} & (\alpha-c\sqrt{5}\leq x\leq \alpha+c\sqrt{5})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

とする。$f(x)$は係数こそ複雑な形をしているが、2次関数なので、数学Ⅱで扱うことが可能である。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\\
&=\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}\frac{1}{c}\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{100}\left(\frac{x-\alpha}{c}\right)^2+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right\}dx\\
&=\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}\frac{1}{c}\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{100c^2}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right\}dx\\
&=-\frac{3\sqrt{5}}{100c^3}\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}x^2dx+\frac{3\sqrt{5}\alpha}{50c^3}\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}xdx-\frac{3\sqrt{5}\alpha^2}{100c^3}\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}dx+\frac{3\sqrt{5}}{20c}\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}dx\\
&=-\frac{3\sqrt{5}}{100c^3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}\alpha}{50c^3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{5}\alpha^2}{100c^3}[x]_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{20c}[x]_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}\\
&=-\frac{\sqrt{5}}{100c^3}\{(\alpha+c\sqrt{5})^3-(\alpha-c\sqrt{5})^3\}+\frac{3\sqrt{5}\alpha}{100c^3}\{(\alpha+c\sqrt{5})^2-(\alpha-c\sqrt{5})^2\}\\
&\qquad-\frac{3\sqrt{5}\alpha^2}{100c^3}\{(\alpha+c\sqrt{5})-(\alpha-c\sqrt{5})\}+\frac{3\sqrt{5}}{20c}\{(\alpha+c\sqrt{5})-(\alpha-c\sqrt{5})\}\\
&=-\frac{\sqrt{5}}{100c^3}\times 2c\sqrt{5}\{(\alpha+c\sqrt{5})^2+(\alpha+c\sqrt{5})(\alpha-c\sqrt{5})+(\alpha-c\sqrt{5})^2\}\\
&\qquad+\frac{3\sqrt{5}\alpha}{100c^3}\times 2c\sqrt{5}\{(\alpha+c\sqrt{5})+(\alpha-c\sqrt{5})\}-\frac{3\sqrt{5}\alpha^2}{100c^3}\times 2c\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{5}}{20c}\times 2c\sqrt{5}\\
&=-\frac{1}{10c^2}(3\alpha^2+5c^2)+\frac{3}{10c^2}\alpha\times 2\alpha-\frac{3\alpha^2}{10c^2}+\frac{3}{2}=1
\end{aligned}$$

となり、全確率が1であることが数学Ⅱまでの知識で確認できる。(この積分計算に関しては、数学Ⅲで学習する置換積分を用いればもっと簡単に計算することができるが、本稿においては数学Ⅱまでの知識を用いて確認することが主目的であることを断っておく)

以後、確率密度関数が$f(x)$である確率変数Xを一般2次分布$M(\alpha,c^2)$に従うと表現す

ることにする。また、確率変数 Y が $M(0,1)$ に従うとき、確率変数 Y は標準 2 次分布に従うと表現することとする。(一般の「正規」分布と標準「正規」分布にならった表現をとることとした。)

6. パラメーター c の変化と $f(x)$ のグラフの関係について

本稿で導入した一般 2 次分布に従う確率変数における分布曲線がパラメーターによってどのように変化するかを確認することが、正規分布曲線の特徴理解の一助となることを述べる。

確率密度関数の 2 次関数で表現される部分における頂点 P が

$$P\left(\alpha, \frac{3\sqrt{5}}{20c}\right)$$

であることは、式から直ぐに求まる。ここで、c は正の実数であることから、頂点の y 座標は常に正、つまり x 軸より上にあることが分かる。また、頂点の y 座標は α に無関係であることも分かる。これらのことに注意し、分布曲線を描くと、図 1 になる。文字係数の 2 次関数のグラフを描くことが不慣れな場合は、図 1 のグラフの確認は行わず、具体的な数字を用いてグラフの概形を確認するか、標準 2 次分布の分布曲線を確認してから次の段階に進んでも構わない。ただし、2 次関数のグラフの場合は、上に凸か下に凸かと、頂点および x 軸との交点が分かればグラフの概形を描くことは難しくないことに着目すれば、文字係数であることを考慮しても、関数が上に凸であることは明らかであり、頂点 P の座標は直ぐに求まる。x 軸との交点に関しては

$$-\frac{3\sqrt{5}}{100}\left(\frac{x-\alpha}{c}\right)^2+\frac{3\sqrt{5}}{20}=0$$

より

$$\left(\frac{x-\alpha}{c}\right)^2=5$$

なので、

$$\frac{x-\alpha}{c}=\pm\sqrt{5}$$

であるから、

$$x=\alpha\pm c\sqrt{5}$$

が x 軸との交点の x 座標であることが確認できる。

以下、α と c に具体的な値を代入し、確率密度関数の式および分布曲線の概形を比較する。まず、$\alpha=0$ とし、$c=\frac{1}{2}, 1, 2$ の場合について比較する。

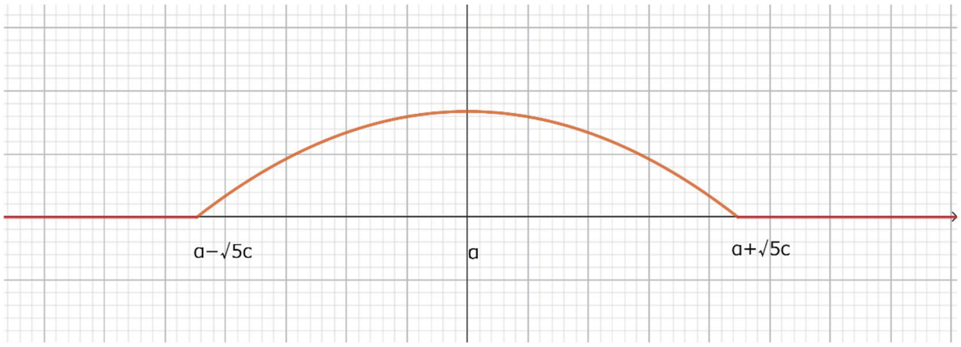

図 1

〈確率密度関数の式の比較（$\alpha=0$）〉

$c=\dfrac{1}{2}$ の場合

$$f(x)=\begin{cases}2\left\{-\dfrac{3\sqrt{5}}{100}(2x)^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\right\} & \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}\leq x\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$c=1$ の場合

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3\sqrt{5}}{100}x^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20} & (-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$c=2$ の場合

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{3\sqrt{5}}{100}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\right\} & (-2\sqrt{5}\leq x\leq 2\sqrt{5})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

〈分布曲線の比較（α=0)〉

ここでは、簡単のために、2次関数の形で式が定義される区間のみについてグラフを描き、比較する。図2における曲線aは $c=\dfrac{1}{2}$、曲線bは $c=1$、曲線cは $c=2$ それぞれの場合の2次関数で表現される範囲の関数のグラフである。

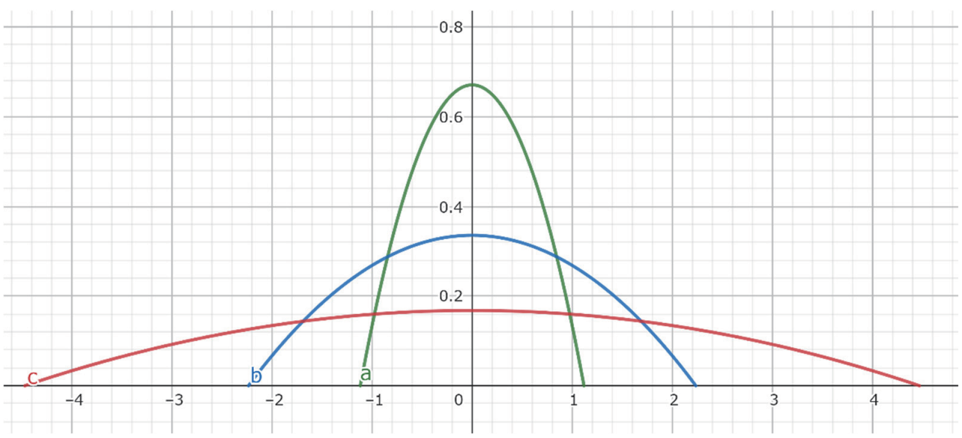

図2

c の値が大きいほど、グラフの山型は低くなり、2次関数で表現される区間は広くなる。また、グラフは y 軸対称になっている。これらの特徴は確率変数 W が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うときの分布曲線が満たしている3つの性質

① 直線 $x=\mu$ に関して左右対称な山形である

② x 軸が漸近線である

③ σ が大きくなると山が低くなり、横に広がる

のうち、①と③に対応する性質である。（②の性質については、x の値が大きくなる（または小さくなる）と2次関数で表現される区間から外れ $y=0$ つまり、x 軸と分布曲線が一致するため、「漸近線」とは異なるが、新しく導入した一般2次分布も満たしていると解釈できる）確率変数 W が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、期待値 $E(W)$ は μ、分散 $V(W)$ は σ^2 であることと、分布曲線の概形の関係について記述がある場合も、分布曲線の概形が突然登場し、その概形と関連付けた記述となっており、期待値と分散を確率密度関数を用いて積分を用いた定義から計算することは数学Bではできないため、教科書にもその点につ

いての記述は見られない。しかし、一般2次分布は2次関数で定義しているため、期待値と分散についても、積分を用いた定義から確認することが可能である。ここで、一般2次分布の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を計算しておこう。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}\frac{x}{c}\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{100}\left(\frac{x-\alpha}{c}\right)^2+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right\}dx$$

であり、これは全曲率を計算したときと同様に、今回は3次関数の積分なので数学Ⅱで扱える内容となる。その結果、$E(X)=\alpha$ が得られる。

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\alpha)^2f(x)dx=\int_{\alpha-c\sqrt{5}}^{\alpha+c\sqrt{5}}\frac{(x-\alpha)^2}{c}\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{100}\left(\frac{x-\alpha}{c}\right)^2+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right\}dx$$

であり、分散についても4次関数の積分となるため、数学Ⅱで計算可能で、$V(X)=c^2$ となる。これらの結果は、正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数 W の期待値 $E(W)$ は μ、分散 $V(W)$ は σ^2 であることに完全に対応している。正規分布の場合は期待値と分散を計算で確認することができないが、一般2次分布の場合は高々4次関数までの積分で期待値と分散を生徒が自らの手を動かして確認することが可能である。期待値や分散の定義をしっかりと理解し、それらを使いこなして自ら計算することで、具体的な分布が与えられたときに自力で積分計算をすれば期待値と分散を知らない場合も対応できるという自信にもつながると筆者は考える。さらに、期待値が分布曲線の山の頂点を与える x 座標になることや、分散が大きくなると山が低くなり、グラフが横長になるという特徴に関しても、自らグラフの概形を描き、そこから「期待値と分散に関する内容で分布曲線の概形から見取ることができることは何か？」という問いかけが可能となり、生徒の思考力、判断力、表現力の育成に繋がる。数学Ⅲを履修した後に正規分布に関する内容を扱うならば、グラフの凹凸に関する内容も含めた増減表から分布曲線の正確な概形を確認することも可能であるが、数学Ⅱ、数学Bまでの学習内容でグラフの概形を確認できる関数は限られている。その問題点を克服し、「分布曲線を生徒が自力で描く」ことと、「分布曲線の概形から、確率変数の期待値、分散についてグラフの概形との関係を自力で考察する」ことを実現するためには、本稿で導入した一般2次分布は非常に有効である。

7. パラメーター α の変化と $f(x)$ のグラフの関係について

前節と同様に、パラメーター c を一定（$c=1$）とし、パラメーター α を変化させた場合、分布曲線はどのように変化するか確認する。前節と同様に、グラフに関しては2次関数で表現される区間についてのみ描いている。

〈確率密度関数の式の比較（$c=1$）〉

$\alpha=-2$ の場合（図3における曲線aがグラフ）

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3\sqrt{5}}{100}(x+2)^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20} & (-2-\sqrt{5}\leq x\leq -2+\sqrt{5})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$\alpha=0$ の場合（図3における曲線bがグラフ）

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3\sqrt{5}}{100}x^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20} & (-\sqrt{5}\leq x\leq \sqrt{5})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$\alpha=2$ の場合（図3における曲線cがグラフ）

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{3\sqrt{5}}{100}(x-2)^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20} & (2-\sqrt{5}\le x\le 2+\sqrt{5}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

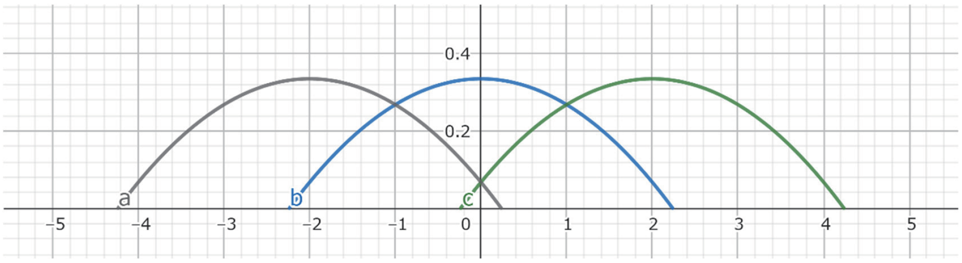

図 3

2 次関数に関しては平行移動と式の関係について数学Ⅰで学習しているので、これらの式を比較しただけで、α の変化とグラフの概形の変化を適切に関連付けることができる生徒も多いだろう。数学を苦手とする生徒が多い場合には、3 つのグラフの概形を描いて比較することも復習になりよいが、頂点と x^2 の係数を確認することから、例えば $\alpha=0$ のグラフを基準として、$\alpha=-2$ と $\alpha=2$ はそれぞれどのように変化しているかを考えさせることも可能である。2 次関数のグラフが式の何に注目すると描くことができるかを考察することは数学Ⅰの復習にもなる。前節の内容と合わせて、グラフの平行移動と拡大縮小が確率密度関数の式のどの部分に現れているのかを考察することで、標準化の考え方に繋げていきたい。

8. 標準化の考察

一般の正規分布を標準化することで標準正規分布に直して確率を求める作業について、数学 B で学習する。標準化する式については学習指導要領解説において「確率変数 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき、$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ とおくと、Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことを取り扱い、正規分布表を用いて確率 $P(a\le X\le b)$ を求めたり、日常の事象や社会の事象などにおいて観測され、正規分布に従うとみなせる変量について考察したりすることなどを取り扱う。」と記されていることを受け、標準化するための式変形は確認したすべての教科書において扱っており、正規分布表を用いて確率を求める方法も記述されている。しかし、なぜ標準化した「新しい確率変数」で「元々与えられた確率変数」に対する確率を求めることができるのか、論理的な説明をしていない。この点は、正規分布に関する学習において暗記を強いていると筆者は強く感じる。この部分に関しても、置換積分の知識さえあれば、標準正規分布を利用することの論理的な理由付けも含めて理解することができるが、置換積分の知識がない場合、積分区間が変化することを直観的に理解することは難しい。そこで、本稿では新しく導入した一般 2 次分布と標準 2 次分布を用いて、標準化する式で確率密度関数の 2 次関数で表現される部分を書き換えた場合、積分の区間がどう変化すれば同じ積分の値になるかを、具体的な数値を用いて確認することで、直観的に標準化する式と確率を考えている区間の変化の関係の理解に繋げたい。ただし、本稿において導入した新しい確率分布は、直接定積分の値を計算できる 2 次関数で確率密度関数が表現されている為、正規分布のように標準化する必要性はない。正規分布の確率密度関数が被積分関数である場合、不定積分を具体的に表現できないことから、標準化の必要性が生

じる。この点については、正規分布の場合は確率を求める場合には直接定積分の値を求めることが不可能であることに言及し、標準化のための式変形と定積分の値について理解するために、本稿で導入した確率密度関数で具体的な計算をして値の確認をすることを丁寧に説明することが求められる。

9. 確率に関する具体的な計算例

確率変数 X が本稿で導入した一般 2 次分布 $M(1, 2^2)$ に従うとき、確率密度関数は以下で与えられる。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{3\sqrt{5}}{100}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+\dfrac{3\sqrt{5}}{20}\right\} & (1-2\sqrt{5}\leq x\leq 1+2\sqrt{5})\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

このとき、確率 $P(0\leq X\leq 1)$ を求めよう。まず、直接確率の定義に従って定積分の値を求める。

$$\begin{aligned}P(0\leq X\leq 1)&=\int_0^1 f(x)dx\\&=\int_0^1\frac{1}{2}\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{100}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right\}dx\\&=\frac{1}{2}\left\{-\frac{3\sqrt{5}}{400}\int_0^1 x^2dx+\frac{3\sqrt{5}}{200}\int_0^1 xdx+\left(-\frac{3\sqrt{5}}{400}+\frac{3\sqrt{5}}{20}\right)\int_0^1 dx\right\}\\&=\frac{3\sqrt{5}}{2}\left\{-\frac{1}{400}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\frac{1}{200}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\frac{19}{400}[x]_0^1\right\}\\&=\frac{3\sqrt{5}}{2}\left\{-\frac{1}{1200}+\frac{1}{400}+\frac{19}{400}\right\}=\frac{59\sqrt{5}}{800}\end{aligned}$$

次に、標準化して確率を求める。$Z=\dfrac{X-1}{2}$ とすると、Z は標準 2 次分布 $M(0,1)$ に従うことから、

$$P(0\leq X\leq 1)=P(0\leq 2Z+1\leq 1)=P\left(-\frac{1}{2}\leq Z\leq 0\right)$$

となる。それぞれの確率密度関数のどの部分の面積が求める確率なのかを確認することで、積分区間の変化や、求める面積（定積分の値）が同じ値になることを直観的に理解することができる。実際に積分の計算を進めると以下になる。

$$\begin{aligned}P\left(-\frac{1}{2}\leq Z\leq 0\right)&=\int_{-\frac{1}{2}}^0-\frac{3\sqrt{5}}{100}x^2+\frac{3\sqrt{5}}{20}dx=\frac{3\sqrt{5}}{20}\left\{-\frac{1}{5}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{2}}^0+[x]_{-\frac{1}{2}}^0\right\}\\&=\frac{3\sqrt{5}}{20}\left\{-\frac{1}{120}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{59\sqrt{5}}{800}\end{aligned}$$

確かに、標準化して確率を求めても同じ値となることが、実際の数値を確認することで確かめられた。クラス内で担当する確率変数を割り当てることで、積分区間や新しく導入した一般 2 次分布のパラメターを変えた確率変数を複数確認し、どの場合でも一般化して得られる確率は同じであることを理解することが可能となる。正規分布における標準化の論理的な理解と同様に、一般 2 次分布についても置換積分についての知識がない場合には論理的な理解は難しいが、実際に数値を確認できるというメリットがあるため、生徒は「標準化した新しい確率変数を用いて確率を計算しても、本当に元の確率変数に対する求めたい確率を正しく求められていているのだろうか？」という疑問を解消できる。

10. 正規分布と一般２次分布の違いと指導上の留意点について

正規分布に従う確率変数に対し、定められた範囲に確率変数が入る確率を求めるとき、確率密度関数を被積分関数として微分積分学の基本定理を用いて定積分の値を計算することができない。そのため、標準化して標準正規分布の数表を用いて確率を求めることが必要となる。新しく導入した一般２次分布はどのようなパラメターだとしても、微分積分学の基本定理を用いた定積分の計算が可能である。標準化した新しい確率変数に対する確率が、元々与えられた確率変数に対する確率と同じであることの論理的な説明は置換積分の知識が必要であることに言及し、数学Ⅱまでの知識で扱える一般２次分布の確率密度関数で具体的なパラメターに対する確率を計算することで、標準化の正当性を直観的に理解して欲しい旨を生徒には丁寧に説明することが重要である。本稿において特に重要視している点は確率分布におけるパラメターの変化と分布曲線の概形の変化の対応関係である。２次関数のグラフは頂点と２次の係数によってその概形は簡単に描くことができる。パラメターが変化すると確率密度関数はどのように変化し、さらにそのグラフはどのように変化するかを生徒が考察する機会を設けることが重要である。この対応関係は正規分布においても全く同じことが言えるが、正規分布のグラフの概形を描くことができるようになるのは数学Ⅲを履修した後であることに言及し、一般２次分布のパラメターと分布曲線の概形の関係を考察することが正規分布に対するそれらの考察と類似していることを強調することが大切である。具体的な確率分布について生徒自身が考察し、確率分布に対する理解を深めることが目的であることを生徒に理解させ、授業内で適切に一般２次分布を利用することが求められる。

11. 参考文献およびグラフ作成ソフト

〈参考文献〉

・ 文部科学省　高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理数編（平成30年７月）学校図書
・ 服部哲弥　ほか「数学Ｂ」（数研数B710）数研出版
・ 戸瀬信之　ほか「高等学校　数学Ｂ」（数研数B711）数研出版
・ 岡本和夫　ほか「数学Ｂ　Progress」（実教数B704）実教出版
・ 岡本和夫　ほか「新編数学Ｂ」（実教数B705）実教出版
・ 髙橋陽一郎　ほか「詳説　数学Ｂ　改訂版」（啓林館数B322）　新興出版社啓林館
・ 藤田岳彦　ほか「数学Ｂ　改訂版」（啓林館数B323）新興出版社啓林館
・ 俣野博・河野俊定　ほか「数学Ｂ　Standard」（東書数B702）東京書籍
・ 長谷川考志　ほか「高等学校数学Ｂ」（第一数B331）第一学習社
・ 初等中等教育分科会（第122回）配布資料（mext. go. jp）
https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/siryo/__icsFiles/afieldfile/2019/05/23/1416449-2.3-2_2.pdf
〈グラフ作成ソフト〉
GeoGebra
https://geogebra.org

Abstract

"Learning content of Normal distribution in high school Mathematics B"

Ayako KOBAYASHI

Normal distribution is a probability distribution closely related to both natural and social phenomena. It is learned in Mathematics B, which is often taken in the second year of high school. However, since the normal distribution probability density function is defined using an exponential function, it cannot be differentiated or integrated with knowledge of Mathematics B. Therefore, it is difficult to logically understand the important properties of the normal distribution. Even in textbooks, properties of the normal distribution are only shown where the explanations are not explicitly mentioned. In this paper, we introduce a new random variable with a probability density function that is similar to that of the normal distribution and can be handled in the learning range of Mathematics II and B. Particularly, using a probability density function that has an interval expressed by a quadratic function and an interval expressed by a constant value function, students can outline of the graph themselves and understand its characteristics. Therefore, it becomes possible to consider the relationship between functions. Furthermore, it is possible to compute the expected value and the variance from their definitions which are in turn expressed using integral expressions. The purpose of this paper is to help students gain a deeper understanding of the characteristics of normal distributions, which are traditionally memorized due to a gap in the curriculum.

人文・自然研究　第 18 号